Analytic and geometric aspects
of spacetimes of low regularity

Doctoral thesis
Annegret Y. Burtscher
Université Pierre et Marie Curie, Universität Wien

Abstract

The general theory of relativity describes the effect of gravitation in terms of the geometry of spacetimes. The curvature of Lorentzian manifolds is related to the energy and momentum of matter (or vacuum) by the Einstein equations, a system of nonlinear partial differential equations. In the 1950s the initial value formulation and local existence of solutions to the Einstein equations were established. As of yet the global structure of spacetimes is much less understood. Motivated by this I investigate the evolution as well as the regularity of spacetimes. I show that certain energy estimates can be controlled by one-sided bounds on the geometry only. Estimates of the Bel–Robinson energy, for example, play a crucial role in the derivation of breakdown criteria for solutions of the vacuum Einstein equations. As an important astrophysical model spacetimes with perfect fluid sources are considered. An existence theory for spherically symmetric solutions to the Einstein–Euler equations is presented, and, above all, I identify for the first time a class of untrapped initial data that leads to the dynamical formation of trapped surfaces. To allow for shock waves, solutions are regarded to be of bounded variation. The distributional framework is essential here and in other areas of general relativity, and it is crucial to understand if and how the regularity of metrics influences the geometry of spacetimes. I account for this by deriving some general results on continuous Riemannian metrics and algebras of generalized functions. This thesis thus illustrates that spacetimes of low regularity exhibit a wide range of interesting phenomena during their evolution.

Keywords: curved spacetime, Einstein equations, Einstein–Euler equations, Riemannian manifold, energy estimate, trapped surface formation, length structure, algebra of generalized functions.

Analytische und geometrische Aspekte
von Raumzeiten niedriger Regularität

Zusammenfassung

Die allgemeine Relativitätstheorie beschreibt die Wirkung von Gravitation mittels geometrischer Eigenschaften von Raumzeiten. Hierbei wird die Krümmung von Lorentzmannigfaltigkeiten mit der Energie und dem Impuls von Materie (oder Vakuum) durch die Einsteingleichungen in Beziehung gebracht, einem System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen. In den 1950er Jahren wurde das Anfangswertproblem formuliert und die lokale Existenz von Lösungen der Einsteingleichungen nachgewiesen. Die globale Struktur von Raumzeiten ist jedoch bis jetzt noch nicht völlig verstanden. Dadurch motiviert, untersuche ich die Entwicklung und Regularität von Raumzeiten. Ich zeige, dass einige Energieabschätzungen durch einseitige Beschränkungen der Geometrie kontrolliert werden können. Abschätzungen der Bel–Robinson Energie spielen etwa bei der Ableitung von Abbruchbedingungen für die Vakuum-Einsteingleichungen eine wichtige Rolle. Als Beispiel für ein wichtiges astrophysikalisches Modell werden Raumzeiten mit idealen Flüssigkeiten untersucht. Eine Existenztheorie für radial symmetrische Lösungen der Einstein–Eulergleichungen wird präsentiert und erstmals eine Klasse regulärer Anfangsdaten identifiziert, die zu einer dynamischen Entstehung von eingefangen Flächen führt. Um die Entstehung von Schockwellen zuzulassen, werden Lösungen mit beschränkter Variation betrachtet. Die distributionelle Herangehensweise ist hier wie auch in anderen Bereichen der allgemeinen Relativitätstheorie essentiell, und ist es ist entscheidend zu verstehen ob und wie die Regularität von Metriken die Geometrie von Raumzeiten beeinflusst. Ich trage dem Rechnung indem ich außerdem einige allgemeine Resultate über stetige Riemannmetriken und Algebren verallgemeinerter Funktionen ableite. Diese Arbeit verdeutlicht somit, dass Raumzeiten niedriger Regularität eine Reihe interessanter Phänomene während ihrer Entwicklung aufweisen.

Schlagworte: gekrümmte Raumzeit, Einsteingleichungen, Einstein–Eulergleichungen, Riemannmannigfaltigkeit, Energieabschätzungen, Entstehung eingefangener Flächen, Längenstruktur, Algebra verallgemeinerter Funktionen.

Aspects analytiques et géométriques d'espaces-temps de faible régularité

Résumé

La théorie de la relativité générale décrit l'effet de la gravitation en termes de géométrie des espaces-temps. La courbure des variétés lorentzienne est liée à l'énergie et l'évolution de la matière (ou du vide) par les équations d'Einstein, un système d'équations différentielles non-linéaires. Dans les années 1950, l'existence locale de solutions des équations d'Einstein a été établie. Motivé par ce résultat, j'étudie l'évolution ainsi que la régularité des espaces-temps. Il est démontré que certaines estimations d'énergie peuvent être contrôlées par des limites unilatérales portant uniquement sur la géométrie. Les estimations de l'énergie Bel–Robinson, par exemple, sont indispensables pour le calcul des critères d'effondrement pour les solutions des équations d'Einstein. Comme un important espace-temps, des modèles astrophysiques avec des sources de fluides parfaits sont considérés. Une théorie d'existence de solutions à symétrie sphérique pour l'équations Einstein–Euler est présenté et on identifie une classe de données initiales non-piégées qui conduit à la formation dynamique de surfaces piégées. Pour permettre des ondes de choc, des solutions à variation bornée sont considérées. Dans ce cadre de là et dans d'autres domaines de la relativité générale, il est crucial de comprendre si et comment la régularité des métriques influe sur la géométrie des espaces-temps. Je propose aussi quelques résultats généraux sur les métriques riemanniennes continues et sur l'algèbre des fonctions généralisées. Cette thèse montre donc que l'espace-temps de faible régularité présentent un large éventail de phénomènes intéressants au cours de leur évolution.

Mots-clefs: espace-temps courbe, équations d'Einstein, équations d'Einstein–Euler, variété riemannienne, estimation de l'énergie, formation de surface piégée, structure de la longueur, algèbre de fonctions généralisées.